Total number of printed pages–12

1 (Sem–1) MAT

2023

MATHEMATICS

Paper : MAT 0100104

(Classical Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) What is the polar form of the complex number $\left(i^3\right)^{15}$?

জটিল সংখ্যা $\left(i^3\right)^{15}$ ৰ ধ্ৰুৱীয় ৰূপটো কি হ'ব?

(b) The value of $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$ is

Contd.

$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$ ৰ মান হ'ল

(i) 1

(ii) -1

(iii) $\cos 2\theta + i\sin 2\theta$

(iv) $\cos 2\theta - i\sin 2\theta$

(c) Is $\log(-i)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\log(-i)$ true for any positive integer m?

যিকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m ৰ বাবে

$\log(-i)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\log(-i)$ সত্য নেকি?

(d) A polynomial function

$$f(x) = \sum_{0 \le k \le n} a_k x^k,\ n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{C}$$

is zero for at most _____ different values of x, unless all $a_0, a_1, \ldots, a_n$ are zero.

এটা বহুপদ ফলন

$$f(x) = \sum_{0 \le k \le n} a_k x^k,\ n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{C}$$

x ৰ সৰ্বাধিক _____ বিভিন্ন মানৰ বাবে শূন্য, যদিহে সকলো $a_0, a_1, \ldots, a_n$ শূন্য নহয়।

(e) Let f be a function of two or more variables that remains unaltered when any two of its variables are interchanged. What is f called?

ধৰা হ'ল f দুটা বা তাতকৈ অধিক চলকৰ এটা ফলন যিটো ইয়াৰ যিকোনো দুটা চলক বিনিময় হ'লে অপৰিৱৰ্তিত হৈ থাকে। f ক কি বুলি কোৱা হয়?

(f) Which of the following is the false statement?

তলৰ কোনটো উক্তি অশুদ্ধ?

(i) Matrix multiplication is not commutative.

মৌলকক্ষ পূৰণ বিনিময়যোগ্য নহয়।

(ii) The cancellation law fails for matrix multiplication.

মৌলকক্ষ পূৰণৰ বাবে বাতিল নিয়ম বিফল হয়।

(iii) Product of two $n \times n$ lower-triangular matrices is lower-triangular.

দুটা $n \times n$ নিম্ন-ত্ৰিভুজ মৌলকক্ষৰ গুণফল নিম্ন-ত্ৰিভুজ।

(iv) All the above are incorrect statements.

ওপৰৰ সকলোবোৰ উক্তি ভুল।

(g) Is it true that "every diagonal matrix is symmetric"?

"প্ৰতিটো কৰ্ণীয় মৌলকক্ষ প্ৰতিসম মৌলকক্ষ" উক্তিটো সঁচানে?

(h) A system of m linear equations in n unknowns is said to be _____ if it possesses no solution.

n অজ্ঞাত থকা m ৰৈখিক সমীকৰণৰ এটা প্ৰণালীৰ যদি কোনো সমাধান নাথাকে তেন্তে _____ বুলি কোৱা হয়।

2. Answer ***any six*** questions : 2×6=12

যিকোনো ছটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the principal value of amplitude of $\sqrt{3}-i$.

$\sqrt{3}-i$ ৰ বিস্তাৰৰ (amplitude) প্ৰধান মানটো উলিওৱা।

(b) Find the cube roots of 1.

1ৰ ঘনমূলবোৰ উলিওৱা।

(c) Solve exp $z = -1$.

exp $z = -1$ সমাধান কৰা।

(d) Show that *tanh z* is a periodic function of period πi.

দেখুওৱা যে *tanh z* হৈছে πi সময়কালৰ এটা সময়কালীন ফলন।

(e) Establish without solving that the equation $x^4+x^2+x-1=0$ has exactly one positive and one negative roots.

সমাধান নকৰাকৈয়ে প্ৰতিষ্ঠা কৰা যে সমীকৰণ $x^4+x^2+x-1=0$ৰ ঠিক এটা ধনাত্মক আৰু এটা ঋণাত্মক মূল আছে।

(f) Find the roots of the equation

$$2x^3-x^2-32x+16=0$$

if two of them are equal in magnitude but opposite in sign.

যদি $2x^3-x^2-32x+16=0$ ৰ দুটা মূলৰ মান (magnitude) সমান কিন্তু চিহ্নত বিপৰীত, তেন্তে সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ উলিওৱা।

(g) Transform the equation

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

into one whose roots are reciprocal of the roots of this equation.

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

সমীকৰণটোক এনে এটালৈ ৰূপান্তৰিত কৰা যাব মূলবোৰ এই সমীকৰণটোৰ মূলবোৰৰ প্ৰতিক্ৰমী।

(h) Suppose that A and B are $m \times n$ matrices. If $Ax = Bx$ holds for all $n \times 1$ columns x, then prove that $A = B$.

ধৰা হওক A আৰু B দুটা $m \times n$ মৌলকক্ষ। যদি $Ax = Bx$ সকলো $n \times 1$ স্তম্ভ x ৰ বাবে প্ৰযোজ্য হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $A = B$।

(i) Is it possible for a matrix to be both hermitian and symmetric? Justify your answer.

মৌলকক্ষ এটা হাৰ্মিটিয়ান আৰু প্ৰতিসম দুয়োটা হোৱাটো সম্ভৱনে? উত্তৰটোৰ ন্যায্যতা প্ৰতিপন্ন কৰা।

(j) Suppose that A is an $m \times n$ matrix. Give a short explanation of why the following statement is true.

$$rank(A) \le min\{m, n\}.$$

ধৰা হওক A এটা $m \times n$ মৌলকক্ষ। তলত দিয়া উক্তিটো কিয় সত্য সেই বিষয়ে চমুকৈ ব্যাখ্যা কৰা।

$$rank(A) \le min\{m, n\}.$$

3. Answer the following questions : ***(any four)*** $5\times4=20$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ *(যিকোনো চাৰিটা)*

(a) State and prove de Moivre's theorem for integral powers. $1+4=5$

অখণ্ড ঘাতৰ বাবে ডি মইভাৰ (de Moivre)ৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(b) Expand $sin^n \theta$ in a series of cosines of sines of multiples of θ according as n is an even or odd positive integer.

$sin^n \theta$ ক θ ৰ বহুগুণৰ cosines বা sinesৰ শ্ৰেণীত প্ৰসাৰিত কৰা n এটা যুগ্ম বা অযুগ্ম ধনাত্মক পূৰ্ণসংখ্যা বুলি বিবেচনা কৰি।

(c) Express $log(x+iy),(x,y)\neq(0,0)$ in the form $A+iB$, where A and B are real. Also, find $log(x+iy)$.

$log(x+iy),(x,y)\neq(0,0)$ ক $A+iB$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰা য'ত A আৰু B বাস্তৱ। লগতে $log(x+iy)$ উলিওৱা।

(d) Establish that for a non-zero complex number w there exist infinitely many complex numbers z such that $\exp z = w$.

অ-শূন্য জটিল সংখ্যা w ৰ বাবে অসীমভাৱে বহুত জটিল সংখ্যা z আছে বুলি প্ৰতিষ্ঠা কৰা যাতে $\exp z = w$ হয়।

(e) Prove that an algebraic equation of degree n has exactly n roots.

প্ৰমাণ কৰা যে, এটা n ঘাতৰ বীজগণিতীয় সমীকৰণৰ মাথো n সংখ্যক মূল থাকে।

(f) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + lx^2 + mx + n = 0$, then find the value of $\sum \alpha^2$ and $\sum \alpha^3$.

যদি α, β, γ সমীকৰণ $x^3 + lx^2 + mx + n = 0$ ৰ মূল হয়, তেন্তে $\sum \alpha^2$ আৰু $\sum \alpha^3$ ৰ মান উলিওৱা।

(g) Let A be any square matrix. Prove that $A + A^T$ is symmetric and $A - A^T$ is skew-symmetric. Moreover, show that there is one and only one way to write A as the sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix.

ধৰা হ'ল A যিকোনো এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ। $A + A^T$ প্ৰতিসম আৰু $A - A^T$ তিৰ্যক (skew)-প্ৰতিসম বুলি প্ৰমাণ কৰা। তদুপৰি, দেখুওৱা যে A ক প্ৰতিসম মৌলকক্ষ আৰু তিৰ্যক (skew)-প্ৰতিসম মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাপে লিখাৰ এটা আৰু এটাই উপায় আছে।

(h) If A and B are square matrices, explain why $AB = I$ implies $BA = I$. Also, show that the argument is not valid for nonsquare matrices.

যদি A আৰু B বৰ্গ মৌলকক্ষ হয় তেন্তে $AB = I$ যে $BA = I$ বুজায় কিয় ব্যাখ্যা কৰা। লগতে দেখুওৱা যে অবৰ্গ মৌলক্ষৰ বাবে যুক্তিটো বৈধ নহয়।

4. Answer the following questions : ***(any two)*** $10 \times 2 = 20$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ *(যিকোনো দুটা)*

(a) Find the equation whose roots are the roots of the equation $x^4 - 8x^2 + 8x + 6 = 0$, each diminished by 2.

Use Descartes' rule of signs to both equations to find the possible number of real and complex roots.

সেই সমীকৰণটো উলিওৱা যাৰ মূলবোৰ সমীকৰণ $x^4 - 8x^2 + 8x + 6 = 0$ ৰ মূল, প্ৰত্যেকটো 2 ৰে হ্ৰাস কৰা। বাস্তৱ আৰু জটিল মূলৰ সম্ভাব্য সংখ্যা বিচাৰি উলিয়াবলৈ দুয়োটা সমীকৰণলৈ ডেকাৰ্টৰ চিহ্নৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰা।

(b) (i) Find an upper limit and a lower limit of the real roots of the equation $x^4+2x^2-x-1=0$. 3

$x^4+2x^2-x-1=0$ সমীকৰণটোৰ বাস্তৱ মূলৰ এটা উচ্চ সীমা আৰু এটা নিম্নসীমা উলিওৱা।

(ii) Solve by Cardon's method 7

কাৰ্ডনৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$x^3-6x^2-6x-7=0$$

(c) (i) Find *log z* and *log z,* where

log z আৰু *log z* উলিওৱা, য'ত

$z=1+i\tan\theta,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 4

(ii) Prove that if z_1 and z_2 are complex numbers then 3

$$\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2$$

z_1 আৰু z_2 জটিল সংখ্যা হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2$$

(iii) Find all values of z such that $\cos z=0$ 3

$\cos z=0$ ৰ বাবে z ৰ সকলো মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) (i) Reduce the following matrix to row echelon form, determine its rank and identify the basic columns. 5

নিম্নলিখিত মৌলকক্ষটোক শাৰী ইচেলন আকৃতিলৈ হ্ৰাস কৰা, ইয়াৰ জাতি (rank) নিৰ্ধাৰণ কৰা আৰু মূল স্তম্ভসমূহ চিনাক্ত কৰা।

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

(ii) If possible, find the inverse of the following matrix by Gauss-Jordan elimination method. 5

যদি সম্ভৱ হয় গাউচ-জৰ্ডান অপসাৰণ পদ্ধতিৰে নিম্নলিখিত মৌলকক্ষৰ প্ৰতিলোম উলিওৱা।

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 4 & -7 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) Are all homogeneous systems of linear equations consistent? When a homogeneous system of linear equations possesses a unique solution? Explain. Further, show that the following homogeneous system has infinitely many solutions, and obtain its general solution :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0$$

ৰৈখিক সমীকৰণৰ সকলো সমজাতীয় প্ৰণালী সামঞ্জস্যপূৰ্ণ (consistent) নেকি? ৰৈখিক সমীকৰণৰ এটা সমজাতীয় প্ৰণালী কেতিয়া একক সমাধানৰ অধিকাৰী হয়? ব্যাখ্যা কৰা। ইয়াৰ উপৰিও দেখুওৱা যে তলত দিয়া সমজাতীয় প্ৰণালীটোৰ অসীমভাৱে বহুত সমাধান আছে, আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান আহৰণ কৰা ঃ

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0$$